Índice

- Polinomios.....5
- Grado y polinomios.....16
- Productos notables.....28
- División polinómica I.....37
- División polinómica II (Teorema del resto).....47
- Cocientes notables.....57
- Factorización I.....68
- Factorización II.....78
- Radicación.....88
- Factorial y número combinatario.....102
- Binomio de Newton.....114
- Números complejos.....127
- Ecuación lineal.....140
- Ecuación de segundo grado.....154
- Ecuaciones polinomiales.....169
- Sistema de ecuaciones con dos o más variables.....180
- Desigualdades e inecuaciones I.....190
- Inecuaciones II.....202
- Sistema de inecuaciones.....213
- Programación lineal.....225
- Funciones I.....236
- Funciones II (Funciones especiales).....250
- Logaritmos I.....260

POLINOMIOS

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Identifica las expresiones algebraicas y su clasificación, para poder aplicarlos en la resolución de problemas.
- Aplica los conocimientos técnicos y propiedades como el término independiente y suma de coeficientes en los polinomios.

Helicocuriosidades

Lectura

Por muchos siglos, antes del siglo XVI, los matemáticos intentaron encontrar la fórmula que sirviera para determinar las soluciones de cualquier ecuación cúbica sin lograrlo.

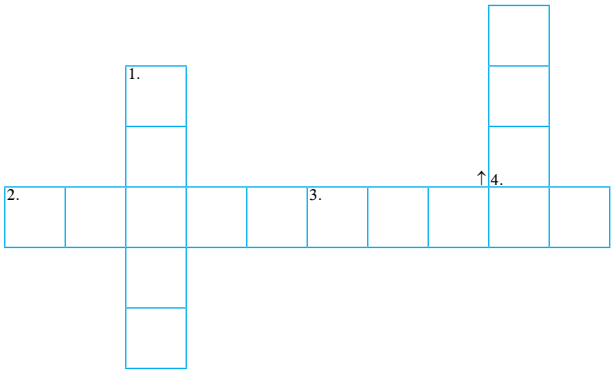
La gran proeza matemática de descubrir la fórmula, fue realizada por el matemático italiano Scipione del Ferro, en primer lugar, y más adelante por Nicoló Tartaglia quien la obtuvo por su cuenta, sin conocer el trabajo de Scipione del Ferro.

Girolamo Cardano

Sin embargo, la fórmula es conocida con el nombre de *fórmula de Cardano*, porque otro matemático llamado Girolamo Cardano, quien estudió cuidadosamente las soluciones de Tartaglia y Del Ferro, luego fue quien publicó la fórmula por primera vez en un grado tratado sobre resolución de ecuaciones titulado *Ars Magna*.

De esta forma es como surgió el polinomio así como muchas de las ecuaciones que hoy conocemos.

- Resuelva el siguiente crucigrama.



1. El grado de $M(x, y) = 4x^5y^2$: _____
2. El grado de $N(x, y) = 5^4x^{10}y^3$: _____
3. El grado de $P(x) = x^3 + 2x^4 + 5x^2$: _____
4. El grado de $Q(x) = 3 + x + x^2$: _____

Helicoteoría

POLINOMIOS

Conceptos previos

Expresión matemática

Es la representación numérica o literal de una expresión, cuyos elementos están ligados por los símbolos matemáticos convencionales.

Expresión numérica

Es aquella cantidad absoluta que tiene un valor fijo y determinado. Considerando que este es un elemento definido en el conjunto de los números reales, tales como

$$-8;\ 0;\ \frac{5}{3};\ \sqrt{6};\ \sqrt[3]{7};\ 3-\sqrt{2};\ e;\ \sqrt{\pi};\ \text{etc.}$$

Expresión literal

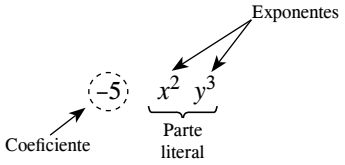
Es aquella cantidad relativa cuyos elementos numéricos y literales están relacionados por los operadores matemáticos convencionales.

Para construir una expresión literal debemos considerar el siguiente aspecto fundamental:

Orden

Para cada término, primero se escribe el coeficiente y luego la parte literal con sus respectivos exponentes.

Veamos



Según el álgebra moderna, las expresiones matemáticas se pueden clasificar siguiendo el diagrama progresivo:

Expresión matemática en $\mathbb{R}$

- Expresión matemática en $\mathbb{R}$
  - Expresión numérica real
    - Algebraica
      - Racional
      - Irracional
    - Transcendente
      - Irracional
  - Expresión literal
    - Algebraica
      - Racional
        - Entera
          - Monomio
          - Polinomio
        - Fraccionaria
      - Irracional
    - Transcendente

Nuestro interés se centrará en el estudio de las expresiones literales, sean estas algebraicas o trascendentes.

Notación matemática

Es la representación simbólica convencional de una expresión matemática, que nos permite mostrar las constantes (numéricas o literales) y variables.

Ejemplos explicativos

1. $\frac{3}{4}xy^4+0{,}65\sqrt{z^2-y}$; en el cual se muestran las constantes numéricas y las variables (x, y y z).
2. $\frac{4ab}{x+y}-\frac{c}{2}z^3w+\sqrt{c-d}\,y^4$; donde se exponen las constantes numéricas, constantes literales (a, b, c y d) y las variables (x, y, z y w).

Notación funcional

Es la simbolización convencional que nos permite representar la relación de dependencia entre una o más variables respecto de otra, pudiendo estas ser de distinta naturaleza.

Ejemplos explicativos

- **Función de una variable**

  $$y = F(x) = 8x^5 + 3x^4 - 7$$

  Expresión F que depende únicamente de x.

- **Función de dos variables**

  $$z = F(x, y) = \frac{4x^3}{y} - \sqrt{2}xy^5+0{,}6x^2$$

  Expresión F que depende de las variables x e y.

- **Función de tres variables**

  $$w = F(x, y, z) = \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{3}z} - \sqrt[3]{xyz+1}$$

  Expresión F que depende de las variables x, y y z.

Expresión algebraica

Es una expresión matemática en el cual las constantes y variables están ligadas por los símbolos de las operaciones aritméticas: (+), (−), (·), (÷), $(\ )^n$ y $\sqrt[n]{\ }$ o alguna combinación de estas en un número limitado de veces.

Ejemplos

- $F(x,\ y,\ z) = \frac{6}{5}x^4y^{-3}+\sqrt{2}z^{\frac{1}{2}}x^8-\frac{2(x+y)}{z^3}$; etc., es una expresión algebraica de cuatro términos.
- La expresión matemática

  $$F(x, y) = 1 + x^2y^8 + x^5y^6 + x^4y^9 + \ldots$$

  no es algebraica, ya que admite infinitos términos.

Término algebraico

Es una expresión algebraica cuyas variables no están separadas por los operadores aritméticos de la adición y sustracción.

Ejemplos diversos

Los términos expuestos

- $T(x, y) = \sqrt{6}x^5y^4$
- $R(x, y, z) = (2+\sqrt{6})xy^2z^3$
- $H(x, y) = \left(\dfrac{10}{a+b}\right)\sqrt[5]{xy^2}$

  son algebraicos.

Pero las expresiones

- $P(x, y) = \dfrac{4xy}{x+y+1}$
- $Q(x, y, z) = \dfrac{z^2}{c}\sqrt{ax+by}$

no son términos algebraicos.

Términos semejantes

Dos o más términos son semejantes, si tienen la misma parte literal variable afectada por los mismos exponentes.

Ejemplos diversos

- $\frac{1}{2}x^5y^4, \frac{1}{3}x^5y^4, \frac{1}{6}x^5y^4$

  son semejantes.

- $\dfrac{a^3xy^2}{\sqrt{z}}, \dfrac{b^4xy^2}{\sqrt{z}}, \dfrac{c^5xy^2}{\sqrt{z}}, \dfrac{d^6xy^2}{\sqrt{z}}$

  también son semejantes ya que a^3, b^4, c^5 y d^6 son los coeficientes.

Reducción de términos semejantes

Entre estos términos se pueden establecer operaciones, tales como la adición y sustracción, cuya reducción se obtiene directamente operando los coeficientes (numéricos o literales).

De los ejemplos anteriores, efectuemos

- $\frac{1}{2}x^5y^4+\frac{1}{3}x^5y^4+\frac{1}{6}x^5y^4=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^5y^4=x^5y^4$
- $\dfrac{a^3xy^2}{\sqrt{z}}-\dfrac{b^4xy^2}{\sqrt{z}}+\dfrac{c^5xy^2}{\sqrt{z}}-\dfrac{d^6xy^2}{\sqrt{z}}=(a^3-b^4+c^5-d^6)\dfrac{xy^2}{\sqrt{z}}$

Clasificación de las expresiones algebraicas

De acuerdo a su naturaleza las expresiones algebraicas se pueden clasificar de la forma siguiente:

1. Expresión algebraica racional (EAR)

Se caracteriza debido a que los exponentes de sus variables son números enteros, pudiendo contener también términos independientes de sus variables.

Ejemplos explicativos

- $H(x, y) = \sqrt{3}x^5y^2 - 0{,}6xy^4+\frac{7}{2}$
- $N(x, y, z) = ax^{-8}y^4 + (b-1)yz^5 - c^2z^{-6}$

Estas expresiones se subdividen a su vez en

a. Expresión algebraica racional entera (EARE)

Es aquella expresión racional en el cual, todos los exponentes de sus variables son números naturales (0; 1; 2; 3;…, etc.).

Ejemplos

- $P(x, y)=\sqrt{3}xy^5+\frac{7}{4}x^4y^2 - 0{,}84x^3y+8$
- $Q(x, y, z)=(a+b)x^{10}+\pi^2yz^6+\sqrt{c}z^5x^4-\dfrac{ab^2}{c}$

También debemos tener en cuenta que la expresión algebraica mostrada

$$R(x, y, z) = \frac{5x^3}{2y^{-1}}+\sqrt{20x^4}-6z^3x\left(\frac{1}{z^2}-\frac{y^2}{x}\right)$$

Luego de efectuarla, resulta

$$R(x, y, z) = \frac{5}{2}x^3y+2\sqrt{5}x^2 - 6zx+6z^3y^2$$

Una racional entera, debido a que los exponentes de las variables x, y y z son valores naturales.

b. Expresión algebraica racional fraccionaria (EARF)

Es aquella expresión racional en el cual, por lo menos uno de los exponentes de sus variables es un entero negativo, o si está escrita de manera fraccionaria, la variable aparece en el denominador con exponente natural.

Ejemplos

$$F(x, y, z) = 0{,}64x^7y^{-2} +9y^{-1}z^4-\sqrt{2}z^5x^{-3}$$

$$G(x, y, z, w) = \frac{4}{x}+\frac{3}{y^2}+\frac{2}{z^3} - \frac{4x+3y+2z}{w^4}$$

También es racional fraccionaria

$$H(a, b, c) = \frac{a^3}{b+c} - \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^4}{a+b} - \frac{10}{(a+b+c)^2}$$

2. Expresión algebraica irracional (EAI)

Se caracteriza debido a que, por lo menos, uno de los exponentes de sus variables es un número fraccionario, o la variable aparece bajo el signo radical de manera irreducible.

Ejemplos explicativos

- $A(x, y, z) = 8x^5y^{\frac{3}{4}} + 7y^{\frac{5}{2}}z^{-6} - \sqrt{2}\,z^3x^{-\frac{1}{2}}$
- $B(x, y, z, w) = ax^3+by^2+cz^4-(a+b+c)\sqrt{w^5}$

También es irracional la expresión

$$T(a,b,c) = \frac{a^2}{\sqrt{b-c}} + \frac{\sqrt{a+b+c}}{3a} - (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^4$$

- Resumiendo lo anterior, se tiene el diagrama

Expresión algebraica	Subdivisión	Exponentes de las variables	Ejemplo típico
Racional	Entera	Natural	
	Fraccionaria	Entero negativo	
Irracional		Fraccionario	

En el análisis matemático, las expresiones que asumen mayor importancia por sus características y propiedades particulares, son las **racionales enteras**, que de acuerdo al número de términos de la expresión, se les denomina semánticamente según el esquema

- Expresión algebraica racional entera
  - Monomio (un solo término)
  - Polinomio (varios términos)
    - Binomio → 2 términos
    - Trinomio → 3 términos
    - Tetranomio → 4 términos
    - Multinomio → más de 2 términos

Para poder reconocer con propiedad este tipo de expresiones, establezcamos formalmente algunos conceptos primitivos.

Monomio

Es aquel término algebraico que se caracteriza por ser racional entero, sin interesar la naturaleza de su coeficiente.

Ejemplos

- $T(x, y) = \sqrt{2}x^5y^4$, es un monomio.
- $N(x, y) = -\frac{5}{4}x^3y^{1/2}$, no es un monomio.

En el caso de que la expresión no dependa de ninguna variable, se le llama constante monómica (o constante).

Polinomio

Es aquella expresión algebraica racional entera que acepta más de un término.

Ejemplos

- $P(x, y, z) = 0{,}64x^5y^7+\frac{3}{4}y^2z^6-\sqrt{5}x^3y^8+10$
- $F(x,y)=ax^4+(a+b)xy^3+(a+b)xy^3+(a+b+c)xy^2-\sqrt{abc}\,y^5$

Polinomio en una variable definida en $\mathbb{R}$

Es aquella expresión algebraica que se reduce a la forma general típica

$$P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0 \neq 0$$

Donde

$a_0, a_1, a_2,\ldots, a_n \rightarrow$ coeficientes reales

$x \rightarrow$ variable

$n \rightarrow$ grado del polinomio

$a_0 \rightarrow$ coeficiente principal

$a_n \rightarrow$ término independiente

También, debemos considerar estos conceptos

- **Polinomio mónico**

Si el coeficiente principal de $P(x)$, $a_0=1$.

Por ejemplo, el polinomio de tercer grado

$P(x) = x^3 + 7x^2 - 8x + 5$ es **mónico.**

- **Polinomio primitivo**

Si el máximo común divisor del valor absoluto de los coeficientes de $P(x)$ es igual a uno.

Es decir

$$\boxed{MCD(|a_0|,|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_n|)=1}$$

Por ejemplo, el polinomio de quinto grado

$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x^2 - 5x + 1$ es **primitivo**.

Ya que: $MCD(|2|,|-3|,|7|,|-5|,|1|) = 1$

o de manera explícita: $MCD(2, 3, 7, 5, 1) = 1$.

Notación funcional de una expresión algebraica

Para ingresar a este importante acápite del álgebra moderna, vamos a formalizar dos conceptos; valor numérico y cambio de variable, previa exposición de algunas generalidades que nos permitirá entender con mayor precisión y actualizar algunos enfoques limitados del álgebra clásica.

Valor numérico de una expresión

En el análisis funcional, para entender el comportamiento de las relaciones de dependencia, es necesario **evaluar** dichas expresiones para aquellos valores, que su campo de definición nos lo permite.

Este universo de valores permisibles para la variable libre, se le denomina formalmente **conjunto de valores admisibles (CVA)** o dominio de la función, que hace que estas expresiones estén definidas en el conjunto $\mathbb{R}$.

Ejemplos explicativos

1. La expresión polinomial

$$F(x) = 2x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 7x - 8$$

está definida para cualquier valor real que asuma la variable x.

Por lo tanto: CVA(F) $= \mathbb{R}$

2. La expresión fraccionaria

$$G(x) = \frac{3x - 5}{(x+1)(x^2 - 4)}$$

está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, excepto para todos los que del denominador sea cero ya que para los valores –1; 2 y –2, la función G no está definida.
Por lo tanto: CVA(G) $= \mathbb{R} - \{-2; -1; 2\}$

3. En la expresión irracional

$$H(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{x}$$

es evidente que $x \neq 0$ y como H es una función real, se debe cumplir que

$$x+6 \geq 0 \leftrightarrow x \geq -6$$

Luego, podemos afirmar que

$$CVA(H) = [-6; +\infty[- \{0\}$$

Finalmente, para visualizar el concepto de valor numérico de una expresión se recurre al **diagrama cartesiano**, sobre el cual se ubican todos los puntos de coordenadas reales definidos en el **CVA** generándose una **curva** llamada **gráfica de la función**, que nos muestra con claridad el comportamiento geométrico de la expresión.

Valor numérico

El valor numérico de una expresión en $\mathbb{R}$ es el valor que toma la relación de dependencia, cuando su variable asume cualquier valor real definido en el CVA.

Ejemplos de aplicación

1. Halle el valor de $P(x) = 3x^2 + 5x - 4$, $x \in \mathbb{R}$,

si la variable x asume el valor de –2.

$$P(-2) = 3(-2)^2 + 5(-2) - 4$$
$$P(-2) = 12 - 10 - 4 = -2$$

2. Dé el valor de $R(x, y) = 5x^2+2y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

si sus variables asumen $x = -3$ e $y = 4$.

$$R(-3; 4) = 5(-3)^2 + 2(4)^2$$
$$R(-3; 4) = 45 + 32 = 77$$

3. Evalúe $T(x, y, z) = z^3 - 2xy$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

si las variables aceptan $x = 3$, $y = 1$ y $z = 2$.

$$T(3; 1; 2) = (2)^3 - 2(3)(1)$$
$$T(3; 1; 2) = 8 - 6 = 2$$

4. Evalúe $F(x-2, y+1) = \sqrt{x - 2y} + \sqrt{3x+5y}$ si sus variables asumen los valores de 5 y 4, respectivamente.

- Si las variables son $(x-2)$ e $(y+1)$, se tendrán

$$x - 2 = 5 \quad \rightarrow \quad x = 7$$
$$y + 1 = 4 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

- Evaluando la expresión irracional

$$F(5; 4) = \sqrt{7 - 2(3)} + \sqrt{3(7)+5(3)}$$
$$F(5; 4) = \sqrt{1} + \sqrt{36} = 1+6 = 7$$

5. Se tiene la expresión $G(x) = \sqrt{4x+3}$.

¿Qué se obtiene al evaluar en G(–2)?

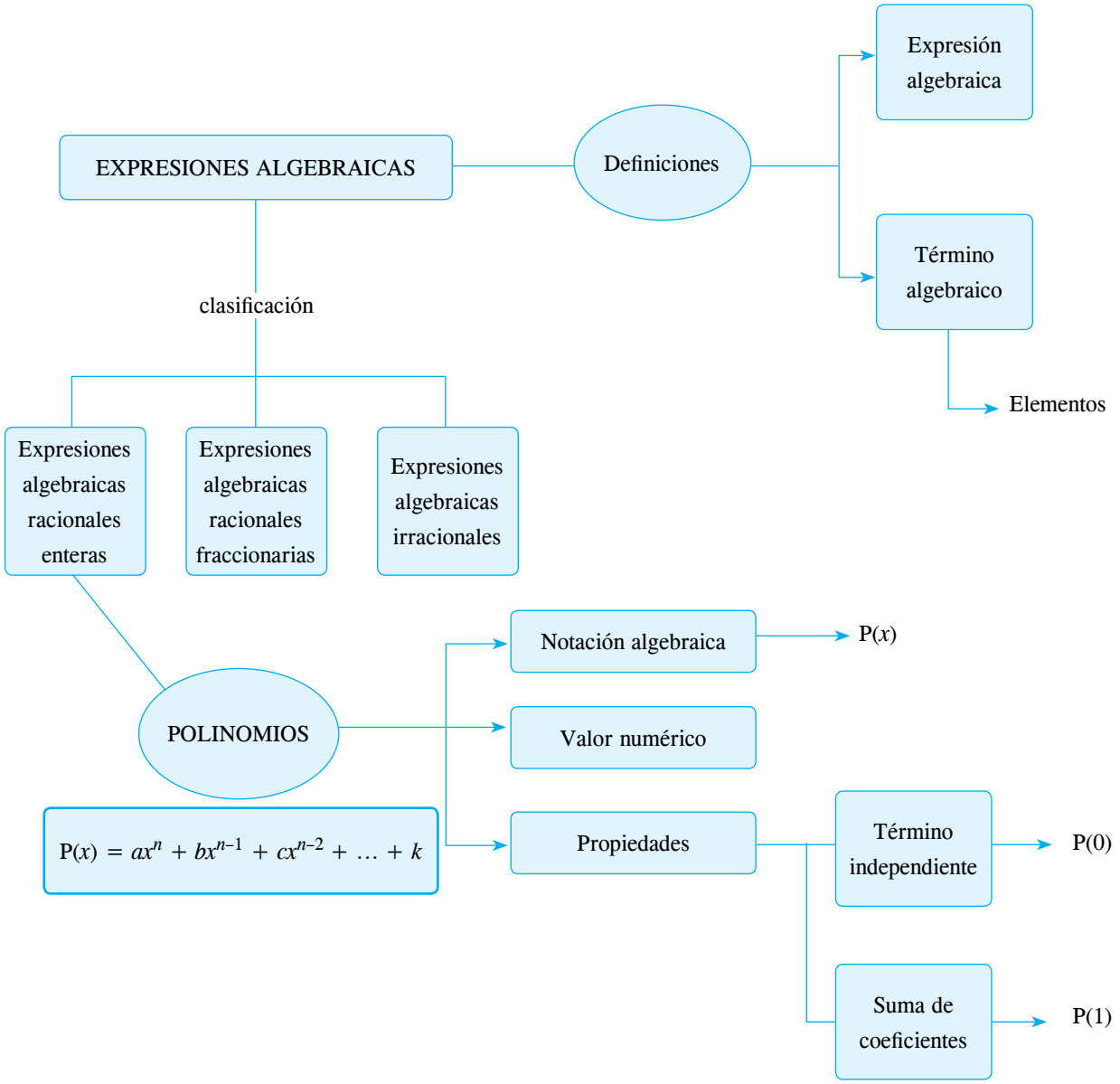
- Veamos: $G(-2) = \sqrt{4(-2)+3}$

$$G(-2) = \sqrt{-5}$$

- Se obtiene un valor no definido en el conjunto $\mathbb{R}$, ya que

$$(-2) \notin CVA = \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right[$$

Helicosíntesis



Problemas resueltos

1. Si los términos son semejantes

$$M(x,\ y)=(m+n)x^{2m-3}y^{n+3}$$

$$N(x,\ y)=(2m-3n)x^{m+2}y^{3n-5}$$

calcule la suma de sus coeficientes.

Resolución

Por ser semejantes se cumple

En x: $2m-3=m+2 \ \rightarrow m=5$

En y: $n+3=3n-5 \ \rightarrow n=4$

Reemplazando en M y N

$$M(x,\ y)=9x^7y^7$$

$$N(x,\ y)=-2x^7y^7$$

$\therefore$ Suma de coeficientes $=9+(-2)=7$

Rpta.: 7

2. Sean $P(x+2)=6x+1$

$P[F(x)]=12x-17$

Halle el valor de F(4).

Resolución

Cálculo de $P(x)$

Dato: $P(x+2)=6x+1$

$P(x+2)=6(x+2)-11$

$\boxed{P(x+2)=6x-11}\ldots(\alpha)$

Cálculo de $P[F(x)]$

En (α) $\quad P[F(x)]=6F(x)-11$

$\rightarrow \quad 12x-17=6F(x)-11$

Luego: $\quad F(x)=2x-1$

Piden: $\quad F(4)=2(4)-1$

$F(4)=7$

Rpta.: 7

3. Si

$$P(2x-1)=12x^2+10x-7$$

determine el equivalente de $P(x)$.

Resolución

Formando la variable $2x-1$ en la expresión dada se tiene

$$P(2x-1)=3(2x)^2+5(2x)-7$$

Restando y sumando 1 en ese orden

$$P(2x-1)=3(2x-1+1)^2+5(2x-1+1)-7$$

$$P(2x-1)=3[(2x-1)+1]^2+5[(2x-1)+1)]-7$$

Luego haciendo $2x-1 \rightarrow x$

$\rightarrow \quad P(x)=3(x+1)^2+5(x+1)-7$

$P(x)=3(x^2+2x+1)+5x+5-7$

$\therefore\ P(x)=3x^2+11x+1$

Rpta.: $3x^2+11x+1$

4. Si $P(x-1)=\dfrac{x+2}{x}$ y $P[G(x)]=\dfrac{x}{x-2}$, evalúe G(7).

Resolución

Haciendo $x-1=G(x)$

$x=G(x)-1$

Luego

$$P[G(x)]=\frac{G(x)+1}{G(x)-1}\ldots(\alpha)$$

Igualando con (α)

$$\frac{G(x)+1}{G(x)-1}=\frac{x}{x-2}$$

$$\cancel{xG(x)}-2G(x)+x-2=\cancel{xG(x)}-x$$

$$-2G(x)=2x+2$$

Dividiendo entre $-2 \rightarrow G(x)=x-1$

$\therefore\ G(7)=6$

Rpta.: 6

Helicopráctica

1. Reduzca los términos semejantes de variables x e y. Indique su coeficiente.

$$(b^2 - 2a + 3)x^{a^2+1}y^5 + (a^2 - b^2)x^{2a}y^5 + x^{2a}y^5$$

2. Si $f(x+1)=x^2-1$, entonces $\dfrac{f(1)-f(0)}{f(-1)}$ es igual a

3. Si $P(x+2)=2(x+3)^3+(x-2)^2-5x+1$, evalúe $P(1)$.

4. Calcule la suma de coeficientes y el término independiente de

$$P(x)=2(x-2)^6-(x-3)(x-5)+5x-2$$

5. Halle el valor de $m+n$ si la expresión

$$E(x, y)=(3m-2)\sqrt{x}+(2n-1)xy^{-2}+x^5y^3-\frac{2}{3}x^6y^2$$

es racional entera.

6. Si se cumple $P(x-2)=3x-5$
$P(Q(x))=27x+4$
evalúe $Q(-2)$.

7. Se tiene que $P(x+3) = 2x-1$.
Simplifique

$$L = \sqrt{P(x+1)-P(x-1)}$$

8. Si $P(x) = \dfrac{7x+6}{6x-7}$, determine $P[P(x)]$.

Helicotaller

Nivel I

1. Reduzca los términos semejantes de variables x e y.

$$3ax^2y^{b-1}+(a+b)x^{a-2}y^5+2x^2y^5$$

Resolución

2. ¿Cuántos alumnos hay en el ceba de Saco Oliveros? Si el resultado de $P(3x-1)=x^6+2x^5-7x^3+1$, calcule $P(2)-P(-7)$. Indique ese número, los alumnos son:

Resolución

Nivel II

3. Si $P(x-4)=x^2-5x-1$, determine $P(x)$.

Resolución

4. Sea el polinomio mónico

$$P(x)=(a^3-7)x^5+3ax^2+a^2+a^3+4$$

Halle el término independiente.

Resolución

5. Sean $F(x)=2x+18$
$F(Q(x))=4x+12$

Evalúe $Q(-2)$.

Resolución

Nivel III

6. Al reducir la siguiente expresión:

$$P(x,y,z)=\frac{5x^4y^3}{2z^{-3}}+\frac{\sqrt{3}x^{\frac{1}{3}}y^5}{2z^{-3}}-\frac{\pi y^9}{5z^3}$$

esta se clasifica como

A) algebraica.
B) trascendente.
C) algebraica irracional.
D) algebraica racional fraccionaria.
E) algebraica racional entera.

Resolución

7. Si $Q(x) = \dfrac{5x+8}{8x-5}$, determine $Q[Q(x)]$.

Resolución

8. Sabiendo que $T(x) = x^2-x+1$, reduzca

$$Q = T(x+1)-T(x-1)-4x$$

Resolución

Helicodesafío

1. Si $F(x) = \sqrt{x^2+2F(x)}$, donde $x \in \mathbb{R}$, halle el valor numérico de $F(\sqrt{2012^2+1})$.

A) 2012 B) 2013 C) 2011
D) 2014 E) 2015

2. Si $F(x)=ax+b$, además $F(x+1)=x+2F(x)$, determine $\dfrac{a}{b}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) $\dfrac{2}{3}$ E) $-\dfrac{4}{5}$

Helicorreto

1. Sean t_1 y t_2 términos semejantes de variables x e y.

$$t_1=(m^2+n^2)x^{3m-2}y^{n+2}$$
$$t_2=(3m-2n)x^{2m+3}y^{8-n}$$

Calcule la suma de sus coeficientes.

A) 2 B) 4 C) 38
D) 40 E) 43

2. Sean

$$P(x)=3x+5$$
$$P[F(x)]=6x+8$$

Halle el valor de $F(-3)$.

A) -1 B) -2 C) -3
D) -5 E) -7

3. Si $P(x-3)=x^2-4x+1$, determine $P(x)$.

A) x^2-x+1 B) x^2+2x-2
C) x^2+x-2 D) x^2+5x+1
E) $2x^2-x+1$

4. Calcule la suma de coeficientes y el término independiente en

$$P(x)=(x-2)^6+(x+1)(x-3)+7$$

A) 4 y 68 B) 4 y 78 C) 9 y 36
D) 9 y 38 E) 18 y 26

5. Si $P(3x-2)=x^5+3x^4-5x+1$, halle el valor de $P(-8)$.

A) 20 B) 23 C) 25
D) 27 E) 32

Helicotarea

Nivel I

1. Reduzca los términos semejantes de variables x e y.

$$3x^{a-1}y^b+abx^3y^b-(a-b)x^3y^2$$

A) $3x^3y^2$ B) $9x^3y^2$ C) $11xy^2$
D) x^4y^3 E) $9x^2y^3$

2. Si $P(2x-1)=x^5-3x^2+x-3$, calcule $P(3)+P(-3)$.

A) 7 B) 15 C) 18
D) 23 E) 27

3. Si $P(x-3)=x^2-2x+5$, determine $P(x)$.

A) x^2+8 B) x^2+4x+8
C) x^2-x+1 D) x^2-3x+8
E) x^2-4x+8

4. Sea el polinomio mónico

$$P(x)=(a^3-26)x^7+2ax^5-ax+a^2-10$$

Halle el término independiente.

A) -1 B) 1 C) -2
D) 2 E) -3

Nivel II

5. Sean $P(x)=5x-3$

$P(Q(x))=10x-8$

Evalúe $Q(-3)$.

A) -5 B) 5 C) -7
D) 7 E) 8

6. Si $x\cdot F(x)=F(x+2)$, además $F(2)=2$, halle $F(8)$.

A) 8 B) 4 C) 16
D) 96 E) 64

7. Evalue F(2); que será el indicador de los alumnos excelentes (nota 20) del 5.º A colegio Saco Oliveros; luego de resolver:

$$P(x+5)=2x+1$$

$$P[F(x)+1]=3x+5$$

Estos alumnos son en número de:

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

8. Dado que $F(x)=\dfrac{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}{\sqrt{5}x-\sqrt{2}}$, determine $F[F(x)]$.

A) $2x$ B) $\dfrac{x}{3}$ C) $5x$
D) $\dfrac{x}{6}$ E) x

Nivel III

9. Sea $F(x)=\dfrac{3x+2}{4x-3}$. Determine $F(F(x))$.

A) 1 B) x C) $2x$
D) $x+1$ E) 2

10. Si $P(x)=x^4-x^2-x$, halle el valor de

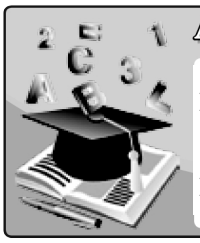
$$P\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots}}}\right)$$

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{8}$
D) 2 E) 4

GRADO Y POLINOMIOS

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICA



Aprendizajes esperados

- Identifica y determina los grados en monomios y polinomios, como el grado que se da al operar polinomios.
- Identifica los diversos polinomios especiales.

Helicocuriosidades

Cuenta la historia que a mediados del siglo XVI los estados españoles estaban muy distanciados y para comunicarse sin que sus mensajes pudiesen ser conocidos por sus enemigos, empleaban una serie de caracteres desconocidos. Durante los desórdenes de la unión, su código secreto estaba compuesto por unos 500 caracteres diferentes y aunque sus mensajes eran frecuentemente interceptados, no podían ser descifrados. Mandadas esas cartas Viète las descifró sin mayores problemas. Esto desconcertó a los españoles durante dos años que pensaron que el rey lo había descubierto a través de un mago. Este mago, que era solo un matemático, había aplicado sus inventos de escrituras y notaciones matemáticas. Estos trabajos están publicados en el libro El *Álgebra nueva* donde Viète muestra el enorme interés que tiene para las matemáticas (y otras ciencias) el efectuar cálculos con letras en lugar de con números.

Un poco de historia

Una de las causas por las que las matemáticas no avanzaron suficientemente hasta el siglo XVI fue sin duda la carencia de unos símbolos que ayudaron a los matemáticos a expresar sus trabajos de una manera más simple y que permitieran su lectura con mayor facilidad.

Desde los babilonios (1700 a. C.) hasta Diofanto (250 d. C.) las operaciones se relataban con el lenguaje ordinario (periodo retórico o verbal). Así, por ejemplo, en el papiro de Rhind (1650 a. C) se puede leer para describir un problema: "Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24". Con la palabra "un montón" designaban la incógnita; un par de piernas andando en la dirección de la escritura era el signo (+) y en contra el signo (–). ¿Cómo se escribía hoy esta ecuación?

A partir de Diofanto y hasta comienzos del siglo XVI se comienzan a utilizar algunas abreviaturas (periodo abreviado o sincopado). Así, por ejemplo, para expresar la ecuación $3x^2-5x+6=0$, Regiomontano (1464) escribía

3 CENSUS ET 6 DEMPTIS 5 REBUS AEQUATURZERO

mientras que Luca Pacioli (1494) escribía

3 CENSUS P 6 DE 5 REBUS AE 0

A partir del siglo XVI, con Viète y Descartes sobre todo, se empieza a utilizar un lenguaje simbólico bastante parecido al actual (periodo simbólico). Por ejemplo, la ecuación anterior era expresada así

Stevin (1585): $3_{②}-5_{①}+6_{⓪}=0$

Viète (1591): $3Q-5N+6ae0$

Helicoteoría

GRADO Y POLINOMIOS

Generalidades

El grado de una expresión cualquiera viene definida por los exponentes de sus variables, sin interesar la naturaleza de sus coeficientes.

Por ejemplo

Para la expresión algebraica racional entera

- $P(x, y, z) = \sqrt{2}x^{101} + \sqrt{3}y^{144} - \sqrt{5}z^{136}$

  diremos que es de grado 144.

- Si tenemos la expresión racional fraccionaria

$$Q(x) = a_0 x^{-99} + a_1 x^{-98} + a_2 x^{-97} + \ldots + a_{97} x^{-2} + a_{98} x^{-1}$$

  podemos afirmar que es de grado (–1), es decir, se escoge el mayor exponente de la variable.

- En la expresión algebraica irracional

$$R(x, y, z) = (a - b)x^{\frac{2}{3}} + (b + c)y^{-\frac{1}{6}} - (c - a)z^{\frac{5}{4}}$$

  obviamente tomaremos como grado el valor $\frac{5}{4}$.

Las aplicaciones diversas de este concepto básico en la álgebra moderna, son de capital importancia en los distintos niveles de esta parte de las matemáticas.

Por ejemplo

- En el nivel elemental, el cálculo de grados absolutos y relativos de expresiones enteras, y la obtención del grado para las distintas operaciones algebraicas.
- En el nivel intermedio, la determinación del número de raíces complejas de una ecuación polinomial definida en el conjunto $\mathbb{C}^n$.
- En el nivel superior, los diversos criterios teóricos en el análisis de las estructuras algebraicas: sistema, campo, anillo y grupo; piedra angular de todo el álgebra contemporánea.

Nuestro interés se centrará en el estudio del grado aplicado exclusivamente a expresiones algebraicas racionales enteras, que será el sustento básico para el posterior análisis de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones elementales.

Grado de una expresión entera

Objetivo

Mostrar que el grado es la propiedad implícita más importante de las expresiones algebraicas racionales enteras, ya que este nos indica el número de raíces para polinomios de una variable, y la dimensión funcional en $\mathbb{R}^n$, para polinomios de varias variables.

Concepto

El grado de una expresión algebraica racional entera, es una de sus características relacionadas con los exponentes de sus letras y que es un número entero positivo que nos permite determinar el número de soluciones de una ecuación algebraica. El grado de una expresión algebraica es de dos clases: grado absoluto y grado relativo.

Cálculo del grado de una expresión entera

A. Para un monomio

- **Grado absoluto (GA)**

  Se determina sumando todos los exponentes de las variables.

- **Grado relativo (GR)**

  Se determina ubicando el exponente de la variable referida en dicha expresión.

Ejemplo explicativo

Dado el monomio $M(x, y, z) = \sqrt{2}x^5y^3z^4$.

- El grado absoluto será

  $GA = 5 + 3 + 4 = 12$

- Con respecto a una de sus variables

  $GR(x) = 5$, $GR(y) = 3$ y $GR(z) = 4$

B. Para un polinomio

- **Grado absoluto (GA)**

  Se determina tomando el mayor grado absoluto de uno de sus términos.

- **Grado relativo (GR)**

  Se determina ubicando el mayor exponente de la variable referida en dicha expresión.

Ejemplo explicativo

Sea el polinomio

$$P(x, y) = \underbrace{3x^8y^4}_{T_1} + \underbrace{7x^5y^6}_{T_2} - \underbrace{4x^2y^7}_{T_3}$$

- Obtención del grado absoluto de cada término

  $GA(T_1) = 8 + 4 = 12$ (Es el mayor)

  $GA(T_2) = 5 + 6 = 11$

  $GA(T_3) = 2 + 7 = 9$

  Por lo tanto: $GA = 12$

- Cálculo del grado relativo

  Mayor exponente de x: $GR(x)=8$

  Mayor exponente de y: $GR(y)=7$

Finalmente, debemos tener en cuenta que

1. El grado de una constante es igual a cero. Veamos: Sea $P(x) = 5 \rightarrow \text{grado}(P) = 0$
2. El grado de la constante nula no está definido, es decir: Si $P(x) = 0 \rightarrow \text{grado}(P)$ es indefinido.
3. Es indiferente utilizar la terminología grado o grado absoluto.

Grado en las operaciones algebraicas

I. Adición y sustracción

Dados $\text{grado}(P) = m$

$\text{grado}(Q) = n$, donde $m > n$

Se define: $\boxed{\begin{array}{l}\text{grado}(P+Q) = m \\ \text{grado}(P-Q) = m\end{array}}$

II. Multiplicación

Dados $\text{grado}(P) = m$

$\text{grado}(Q) = n$

Se define: $\boxed{\text{grado}(P \cdot Q) = m+n}$

III. División

Dados $\text{grado}(P) = m$

$\text{grado}(Q) = n$, donde $m \geq n$

Se define: $\boxed{\text{grado}\left(\dfrac{P}{Q}\right) = m-n}$

IV. Potenciación

Dado $\text{grado}(P)=m$ y n un número natural cualquiera.

Se define: $\boxed{\text{grado}(P^n) = m \cdot n}$

V. Radicación

Dado $\text{grado}(P)=m$ y n un número natural, tal que $n \geq 2$.

Se define: $\boxed{\text{grado}(\sqrt[n]{P}) = \dfrac{m}{n}}$

Ejemplos explicativos

1. Dados $\text{grado}(P) = 3$ y $\text{grado}(Q) = 2$, determine el grado de la expresión

$$E = 9P^4 + 8Q^5 - 6PQ$$

Calculando por separado el grado de cada término

$\text{grado}(9P^4) = 3 \cdot 4 = 12$ (Es el mayor)

$\text{grado}(8Q^5) = 2 \cdot 5 = 10$

$\text{grado}(6PQ) = 3 + 2 = 5$

Por lo tanto: $\text{grado}(E) = 12$

Observe que los coeficientes de la expresión 9; 8 y –6, no intervienen en el cálculo de los grados.

2. Determine el grado de $A = \dfrac{P^3}{Q^2}(7P+6Q)$ si $\text{grado}(P)=4$ y $\text{grado}(Q) = 5$.

- Calculando por separado, se tiene

$$\text{grado}\left(\frac{P^3}{Q^2}\right) = 4 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 12 - 10 = 2$$

$$\text{grado}(7P+6Q) = 5$$

(El mayor grado de los dos términos)

- Como ambos se están multiplicando, resultará

$$\text{grado}(A) = 2 + 5 = 7$$

3. Si $\text{grado}(P) = 6$ y $\text{grado}(Q) = 2$, dé el grado de

$$T = \sqrt[3]{P^4 + Q^9} - \sqrt[4]{P^8 - Q^6}$$

- Analizando por separado el grado de cada radical, se tienen

$\underbrace{P^4}_{6 \cdot 4} + \underbrace{Q^9}_{2 \cdot 9} \rightarrow \text{grado}(P^4+Q^9)=24$ (Es el mayor)

Por tanto

$$\text{grado}(\sqrt[3]{P^4 + Q^9}) = \frac{24}{3} = 8$$

$\underbrace{P^8}_{6 \cdot 8} - \underbrace{Q^6}_{2 \cdot 6} \rightarrow \text{grado}(P^8 - Q^6)=48$ (Es el mayor)

$$\text{grado}(\sqrt[4]{P^8 - Q^6}) = \frac{48}{4} = 12$$

Luego, en resumen se tiene lo siguiente:

$$T = \underbrace{\sqrt[3]{P^4 + Q^9}}_{\text{grado } 8} - \underbrace{\sqrt[4]{P^8 - Q^6}}_{\text{grado } 12}$$

Tomando el mayor de ellos: $\text{grado}(T) = 12$

Expresiones trascendentes, trascendentales o no algebraicas

Nos referimos específicamente a las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas, dado que representan números que no se deducen de ecuaciones algebraicas; así por ejemplo: $f(x) = \tan x$, es trascendente, y representa al número tan5 cuando $x=5$, etc.

Formas polinómicas según el grado

1. Forma general de un polinomio de 1.er grado

   $P(x) = ax + b,\ a \neq 0$

2. Forma general de un polinomio de 2.º grado

   $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

3. Forma general de un polinomio de 3.er grado

   $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$

   ⋮

   Forma general de un polinomio de enésimo grado

   $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n,\ a_0 \neq 0$

Propiedades generales

A. Para determinar la suma de los coeficientes de un polinomio $P(x)$, se evalúa dicha expresión para $x = 1$; es decir, en la expresión general de grado n

Suma de coeficientes de $P(x) = P(1)$

$$P(1) = a_0(1)^n + a_1(1)^{n-1} + a_2(1)^{n-2} + \ldots + a_n$$

$$\boxed{\Sigma\text{coef.}[P(x)] = a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

B. Para determinar el término independiente de un polinomio $P(x)$, se evalúa dicha expresión para $x = 0$; es decir, en la expresión general de grado n

Término independiente de $P(x) = P(0)$

$$P(0) = a_0(0)^n + a_1(0)^{n-1} + a_2(0)^{n-2} + \ldots + a_n$$

$$\boxed{TI[P(x)] = a_n}$$

Ejemplo 1

Calcule la suma de los coeficientes de la expresión entera

$$P(x) = (2x - 1)^3 (x + 2)^4 + (3x + 2)^2 (x - 2)^5$$

$$\Sigma\text{coef.}[P(x)] = P(1)=(1)^3(3)^4+(5)^2(-1)^5$$

$$\Sigma\text{coef.}[P(x)] = 81 - 25 = 56$$

Ejemplo 2

Muestre el término independiente del polinomio

$$P(x) = (5x+2)^4(7x - 6) - (4x + 5)^2(3x - 2)^3$$

$$TI[P(x)] = P(0) = (2)^4(-6) - (5)^2 (-2)^3$$

$$TI[P(x)] = -96 + 200 = 104$$

Ejemplo 3

Para qué valor natural de n en la expresión

$$P(x) = (2x + 1)^n + (3x + 1)^n$$

la suma de coeficientes excede en 23 al término independiente.

Por dato, se tiene: $P(1) - P(0) = 23$

Evaluando la expresión para

$x = 1$: $P(1) = 3^n + 4^n$

$x = 0$: $P(0) = 1^n + 1^n = 2$

En el dato inicial: $(3^n + 4^n) - 2 = 23$

resulta: $3^n + 4^n = 25$

Por simple inspección: $n=2$

Polinomios especiales

Concepto

Son aquellas expresiones enteras cuyas características (grado, coeficientes y variables) y por la forma como se presentan, guardan ciertas propiedades implícitas que las hacen notables. En este nivel, por sus aplicaciones usuales, nos interesa el estudio de los siguientes polinomios:

1. Polinomio ordenado

Con respecto a una variable, es aquel polinomio en la cual los valores de los exponentes de dicha variable, solo aumentan o disminuyen según que la ordenación sea creciente o decreciente.

La variable que presenta esta característica se denomina ordenatriz.

Ejemplos

➢ En el polinomio

$$P(x, y) = 6x^7y^2 + 5x^5y^4 - 8x^3y^6 + 4y^9$$

La variable x es ordenatriz decreciente de P.

La variable y es ordenatriz creciente de P.

➢ En la expresión racional

$$Q(x, y) = \sqrt{2}x^8+3x^5y^4+0{,}6x^9y^7-\pi x^4y^{10}$$

no existe una ordenación respecto de x.

Respecto de y está ordenado en forma creciente.

2. Polinomio completo

Con respecto a una variable, es aquel polinomio en la cual, los valores de los exponentes de dicha variable aparecen de manera consecutiva desde el mayor hasta el cero inclusive, sin interesar la ordenación presentada.

Por ejemplo

El polinomio mostrado

$$F(x, y) = 6xy^4 + 5x^3y^2 - 7x^2y + 8x^4y^5 - 2y^6$$

es completo respecto de x, pero incompleto respecto a y. Además, el término que no depende de x es $(-2y^6)$; es decir

$$\boxed{TI[F(x,y)] = -2y^6}$$

Propiedades usuales

- **Corolario 1**

  En todo polinomio completo de una variable, el número de términos es igual al grado de la expresión aumentado en la unidad; es decir

$$\boxed{\text{N.}^{\text{o}} \text{ de términos} = \text{grado} + 1}$$

Ejemplo

➢ En el polinomio

$$P(x) = 4x + 7x^3 + 5 + 6x^5 + 2x^2 + 8x^4$$

N.º de términos = grado(P) + 1

N.º de términos = 5 + 1 = 6

- **Corolario 2**

  En todo polinomio completo y ordenado de una variable, la diferencia de grados (en valor absoluto) de dos términos consecutivos, es igual a la unidad.

$$\boxed{|\text{grado}(T_k) - \text{grado}(T_{k+1})| = 1}$$

Ejemplo

➢ En el polinomio

$$P(x) = \underbrace{a_0x^8}_{T_1} + \underbrace{a_1x^7}_{T_2} + \underbrace{a_2x^6}_{T_3} + \underbrace{a_3x^5}_{T_4} + \underbrace{a_4x^4}_{T_5} + \underbrace{a_5x^3}_{T_6} + \underbrace{a_6x^2}_{T_7} + \underbrace{a_7x}_{T_8} + \underbrace{a_8}_{T_9}$$

Veamos

$$|\text{grado}(T_2) - \text{grado}(T_3)| = |7 - 6| = |1| = 1$$

$$|\text{grado}(T_5) - \text{grado}(T_6)| = |4 - 3| = |1| = 1$$

3. Polinomio homogéneo

Un polinomio reducido de dos o más términos y más de una variable es homogéneo, si dichos términos presentan el mismo grado absoluto, denominado grado de homogeneidad.

Ejemplo

➢ En el polinomio

$$P(x) = \underbrace{7x^8y^4}_{T_1} + \underbrace{9x^5y^7}_{T_2} - \underbrace{8x^3y^9}_{T_3} + \underbrace{4xy^{11}}_{T_4}$$

$$GA(T_1) = GA(T_2) = GA(T_3) = GA(T_4) = 12$$

Es decir: grado de homogeneidad(P) = 12

- **Corolario 3**

  Todo polinomio homogéneo $P(x, y)$ de grado n verifica la siguiente sustitución literal:

$$\boxed{P(mx, my) = m^n P(x, y),\ m \in \mathbb{R}^*}$$

donde n es el grado de homogeneidad y la constante m es un escalar real.

Ejemplo

Dado el polinomio homogéneo

$$P(x, y) = 4x^3y^2 - 7x^2y^3 + 5xy^4$$

Sustituyendo

$x \to mx$, $y \to my$ (x por mx, y por my)

resulta

$$P(mx, my) = 4(mx)^3(my)^2 - 7(mx)^2(my)^3 + 5(mx)(my)^4$$

$$P(mx, my) = m^5(4x^3y^2 - 7x^2y^3 + 5xy^4)$$

Finalmente: $P(mx, my) = m^5P(x, y)$, $m \in \mathbb{R}^*$

donde 5 es el grado de homogeneidad.

4. Polinomios idénticos

Dos o más polinomios del mismo grado y en las mismas variables son idénticos, si los valores numéricos resultantes de dichas expresiones son iguales, para cualquier sistema de valores asignados a sus variables, es decir

$$\boxed{P(x, y) \equiv Q(x, y) \leftrightarrow P(a, b) = Q(a, b),\ \{a, b\} \subset \mathbb{R}}$$

Ejemplo

Dados: $P(x, y) = (x + y)^4 - (x - y)^4$

$Q(x, y) = 8xy(x^2 + y^2)$

Afirmamos que P y Q son idénticos, debido a que al evaluarlos para

$$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix} \begin{cases} P(1;\ 1)=(1+1)^4-(1-1)^4=16 \\ Q(1;\ 1)=8(1)(1)(1^2+1^2)=16 \end{cases}$$

Del mismo modo, para

$x=2 \quad P(2;\ 1)=(2+1)^4-(2-1)^4=81-1=80$

$y=1 \quad Q(2;\ 1)=8(2)(1)(2^2+1^2)^4=16(5)=80$

los valores numéricos resultantes siempre son iguales.

- **Teorema 1**

  Dos polinomios de las mismas características, tales como

  $P(x, y) = a_0x^m + a_1x^ny^p + a_2x^qy^r + \ldots + a_ky^s$

  $Q(x, y) = b_0x^m + b_1x^ny^p + b_2x^qy^r + \ldots + b_ky^s$

  son idénticos, si los coeficientes de sus respectivos términos semejantes, son iguales; es decir

  $$\boxed{a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots a_k = b_k}$$

  Ejemplo

  Si son idénticos los polinomios

  $P(x, y, z) = (a + b)x^5 + (a + c)y^3 + (c + a)z^4$

  $Q(x, y, z) = 5x^5 + 3y^3 + 4z^4$

  halle el valor de $a + b + c$.

  ➢ Por el teorema 1

  $a + b = 5 \quad \ldots (1)$
  $b + c = 3 \quad \ldots (2)$
  $c + a = 4 \quad \ldots (3)$

  Sumando las relaciones: $2(a + b + c) = 12$

  Simplificando: $a + b + c = 6$

5. Polinomio idénticamente nulo

Es aquel polinomio de grado no definido, cuyo valor numérico resultante siempre es igual a cero, para cualquier sistema de valores que asumen sus variables; es decir:

$$\boxed{P(x, y) \equiv 0 \leftrightarrow P(a, b) = 0,\ \{a, b\} \subset \mathbb{R}}$$

Ejemplo

Dado

$P(x, y)=(x + 4y)(x + y) - (x + 3y)(x + 2y) + 2y^2$

afirmamos que P es idénticamente nulo, debido a que al evaluarlo para:

$$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix} \left\{ P(1;\ 1)=(5)(2)-(4)(3)+2 = 0 \right.$$

De igual manera, para:

$$\begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix} \left\{ P(1;-1)=(-3)(0)-(-2)(-1)+2 = 0 \right.$$

los valores numéricos siempre resultan ser iguales a cero.

- **Teorema 2**

  Un polinomio de la forma

  $$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x+a_m$$

  es idénticamente nulo, si todos sus coeficientes son iguales a cero; es decir

  $$\boxed{a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{m-1} = a_m = 0}$$

  Ejemplo

  Determine el grado de la expresión

  $$R(x, y) = \sqrt[1-c]{(xy)^{a+b}}\,\{x^{b+4c} - y^a\}$$

  si el polinomio mostrado

  $$P(x) = (x - a)^2 + b(x - 3) + cx^2$$

  es idénticamente nulo considerando $c < a < b$.

  ➢ Efectuando operaciones en P, se tiene

  $P(x) = x^2 - 2ax + a^2 + bx - 3b + cx^2$

  Agrupando

  $P(x) = (c + 1)x^2 + (b - 2a)x + (a^2 - 3b)$

  Como $P(x)\equiv 0$, por el teorema 2, resultan

  $c + 1 = 0 \rightarrow c = -1$

  $b - 2a = 0 \rightarrow b = 2a \quad \ldots (\alpha)$

  $a^2 - 3b = 0$, por (α): $a^2 - 6a = 0$

  $a(a - 6) = 0$ por la consideración

  $a \neq 0$, luego: $a = 6 \rightarrow b = 12$

  ➢ Reemplazando los valores de a, b y c en R.

  $$R(x, y) = \sqrt[2]{(xy)^{18}}\,\{x^{12+4(-1)} - y^6\}$$

  $$\underbrace{(xy)^9}_{\text{grado 18}} + \underbrace{(x^8 - y^6)}_{\text{grado 8}}$$

  $\therefore$ grado(R) $= 18 + 8 = 26$

- **Teorema 3**

  Si un polinomio P(x) (aparentemente) de grado n, se anula por lo menos para (n+1) valores distintos de x, dicho polinomio será idénticamente nulo.

  Ejemplo

  Si el polinomio de segundo grado

$$P(x) = a(x+1)(x-2) + b(x-1)(x-2) + c(x^2-1) + 6$$

  verifica P(1) = P(2) = P(–1) = 0, halle el valor de $a^2 + b^2 + c^2$.

  → Como P se anula para tres valores, necesariamente P(x)=0; es decir, su valor numérico siempre será igual a cero, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Evaluando para

$x = 1 \rightarrow a(2)(-1) + 6 = 0$
$-2a + 6 = 0 \rightarrow a = 3$

$x = 2 \rightarrow c(2^2 - 1) + 6 = 0$
$3c + 6 = 0 \rightarrow c = -2$

$x = -1 \rightarrow b(-2)(-3) + 6 = 0$
$6b + 6 = 0 \rightarrow b = -1$

Por lo tanto: $a^2 + b^2 + c^2 =$
$(3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 14$

Helicosíntesis

POLINOMIOS

Conceptos y propiedades

GRADO

DE MONOMIOS

Grado relativo
Exponente de cada variable

Grado absoluto
Suma de los exponentes de las variables

DE POLINOMIOS

Grado relativo
Mayor exponente de cada variable

Grado absoluto
Mayor suma de los exponentes de las variables (en algún término)

POLINOMIOS ESPECIALES

Polinomios homogéneos
Sus términos tienen igual grado absoluto.

Polinomio ordenado
Los exponentes de alguna variable se ubican en orden creciente o decreciente.

Polinomio completo
En alguna variable se presentan todos los exponentes desde el cero (no importa el orden).

Polinomios idénticos
Dos o más polinomios con igual valor numérico (para todo valor de sus variables). Además, sus términos semejantes tienen coeficientes iguales, respectivamente.

Polinomios idénticamente nulo
Su valor numérico es cero (para todo valor de sus variables). Además, sus coeficientes son todos ceros.

Problemas resueltos

1. Si el término independiente del polinomio

$$P(2x-3)=(2x+3)^{4m}+2(4x^2+3)^{2m}+(4x-2)^{2m}$$

es 1600, halle el valor de m.

Resolución

El TI de $P(2x-3)$ es

$TI[P(2x-3)]=P(0) \rightarrow 2x-3=0$

$x=3/2$

Luego

$TI[P(2x-3)]=P(0)=6^{4m}+2(12)^{2m}+4^{2m}=1600$ (Dato)

$$\underbrace{(6^{2m})^2+2(6^{2m})(2^{2m})+(2^{2m})^2}_{\text{TCP}}=1600$$

$$(6^{2m}+2^{2m})^2 = 1600$$

$$\rightarrow 6^{2m}+2^{2m} = 40$$

$$(6^2)^m+(2^2)^m = 40$$

$$\rightarrow 36^m+4^m = 40$$

donde el único valor de m es 1.

$\therefore m=1$

Rpta.: 1

2. Cuántos factores indicados entre paréntesis debe considerarse para que el grado de

$$P(x)=(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\ldots$$

sea 120.

Resolución

Sean n los factores pedidos

$$P(x)=\underbrace{(x^1+1)}_{G:1}\underbrace{(x^2+1)}_{G:2}\underbrace{(x^3+1)}_{G:3}\ldots\underbrace{(x^n+1)}_{G:n}$$

grado(P)=grado(Producto)$=1+2+3+\ldots+n$

Dato $120 = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$240=n(n+1)$

$15\times 16=n(n+1)$

$\therefore n=15$

Rpta.: 15

3. Cuánto deben sumar m y n tal que para cualquier valor se x se cumpla que

$$15+2x\equiv m(2x-3)-n(3x-5)$$

Resolución

Multiplicando y agrupando

$$15+2x = \underbrace{(2m-3n)}_{2}x+\underbrace{(5n-3m)}_{15}$$

Igualando

$2m-3n=2\ .\ .\ .\ (\alpha)$

$-3m+5n=15\ .\ .\ .\ (\beta)$

(I) por 3: $6m-9n=6$ +

(II) por 2: $-6m+10n=30$

$n=36$

$\rightarrow m=55$

$\therefore m+n=91$

Rpta.: 91

4. Si el polinomio

$$P(x)=x^{2a+1}+2x^{b+3}+3x^{c+2}+\ldots$$

es completo y ordenado decrecientemente y posee $2c$ términos, halle el valor de $a+b+c$.

Resolución

Por propiedad

$TI[P(2x-3)]=P(0) \rightarrow 2x-3=0$

$2a+\cancel{1}-\cancel{1} = b+3 \rightarrow 2a-b = 3\ldots(I)$

$b+3-1 = c+2 \rightarrow b-c = 0 \rightarrow b = c$

$2c = 2a+1+1 \rightarrow c = 9+1$

Reemplazando (I)

$2a-(a+1)=3$

$a = 4$

$c = 5 \rightarrow b = 5$

$\therefore a+b+c=14$

Rpta.: 14

Helicopráctica

1. Halle el valor de n si la expresión

$$M(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{n+2} \cdot \sqrt[7]{x^{3n}}}{\sqrt[4]{x^{n-1}}}}$$

es de grado 2.

2. Sabiendo que el polinomio es completo y ordenado en forma decreciente

$$P(x) = ax^{a-3} + abcx^{b-2} + (a^2 + b^2)x^{c+3}$$

calcule la suma de sus coeficientes.

3. En el polinomio

$$P(x, y) = x^{a-2}y^{b+3} + x^{a-3}y^{b} + x^{a+4}y^{b-2}$$

donde $\quad GR(x) = 10$
$\quad GR(y) = 6$

determine el grado del polinomio.

4. Si el polinomio es homogéneo

$$P(x, y) = 3x^{m+1}y^{n+3} + 2^{10}x^{a}y^{b} - x^{2m}y^{n+2}$$

halle el valor de $m + m^2 + m^3$.

5. Si los siguientes polinomios son idénticos:

$$a(x-2) + b(x+2) \equiv 5(x-5)$$

determine $\frac{a}{b}$.

6. Sabiendo que se cumple

$$a(4x + y) + b(x + 3y) \equiv 11x + 11y$$

halle el valor de $2a + \frac{5}{3}b$.

7. Sabiendo que el polinomio es idénticamente nulo

$$P(x) = (m-5)x^7 + (n+3)x^3 - (p-7)$$

halle el valor de $\frac{m - 3n}{p}$.

8. Si el polinomio es completo y ordenado

$$P(x) = ax^{2a-1} + bx^{b-2} + acx^{c} + n$$

halle el valor de abc.

Helicotaller

Nivel I

1. Halle el valor de n si

$$T(x) = \frac{\sqrt[4]{x^{2n-3}} \cdot \sqrt[4]{x^{2n+3}}}{\sqrt[5]{x^{2n}} \cdot \sqrt[-5]{x^{16}}}$$

es de grado 6.

Resolución

2. Dado el polinomio

$$P(x, y) = 2^{10}x^{n+3}y^{n-5} + x^{n}y^{n-1} + x^{n+1}y^{n+2}$$

cuyo grado es 11, calcule $GR(x) - GR(y)$.

Resolución

Nivel II

3. Calcule la suma de coeficientes del polinomio completo y ordenado

$$P(x) = ax^a + bx^b - cx^c + dx^d - abcd$$

donde a, b, c y d son diferentes entre sí.

Resolución

4. La edad del profesor Renán; es el resultado del ejercicio. "En el polinomio homogéneo

$$P(x, y) = 5x^{a+8}y^{16} + x^7y^{b+13} - 2x^{a+2}y^{b+15}$$

halle el valor de $a + b$". ¿Cuál es la edad?

Resolución

5. Si el polinomio se anula para más de dos valores asignados a su variable

$$P(x) = (ab + ac - 3)x^2 + (ac + bc - 6)x + (ab + bc - 9)$$

calcule $abc(a + b)(a + c)(b + c)$.

Resolución

Nivel III

6. A partir de

$$a(x-2)(x-3) + b(x-3)(x-1) + c(x-1)(x-2) \equiv 5x^2 + 19x + 18$$

calcule $a + b + c$.

Resolución

7. Si se cumple que

$$19x-20\equiv a(3x-2)+b(2x-5)$$

calcule

$$a^b+b^a$$

Resolución

8. Dado el polinomio

$$Q(x,\ y,\ z)\ =\ ax^2yz^m+bx^3y^2z^6+cx^my^nz^2$$

además $\dfrac{GR(x)}{3}=\dfrac{GR(y)}{2}=\dfrac{GR(z)}{5}$ $(a,\ b,\ c\neq 0)$ $mn\geq 6$

evalúe $M\ =\ \dfrac{GA(Q)}{GR(x)+GR(y)+GR(z)}$.

Resolución

Helicodesafío

1. Si el polinomio es completo y ordenado, calcule $a+n$ si tiene $(2n+8)$ términos.

$$P(x)=x^{n-3}+x^{n-2}+x^{n-1}+\ldots+x^{a+4}$$

A) 9 B) 6 C) 3
D) 12 E) 15

2. Determine el grado del monomio

$$M(x,\ y,\ z,\ldots)=2^{10}xy^5z^{13}w^{25}\ldots$$

de 10 variables.

A) 520 B) 670 C) 720
D) 840 E) 920

Helicorreto

1. Calcule la suma de coeficientes y el término independiente del polinomio

$$P(x)=(2x-1)^{200}+(x+1)(x-3)+9$$

A) 8 y 10 B) 7 y 16 C) 9 y 15
D) 6 y 7 E) 16 y 9

2. Dado el polinomio

$$P(x,\ y)=x^ny^{n+3}-x^{n+2}y^{n+4}+x^{n-1}y^{n+2}$$

cuyo grado es 18, halle el valor de $GR(x)-GR(y)$.

A) 3 B) –1 C) –2
D) 2 E) –3

3. Si el polinomio es completo y ordenado en forma ascendente, calcule $a+b+c$.

$$P(x)=x^{a-1}+x^{a+b-2}+x^{c-b}$$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 13

4. Dados los polinomios

$P(x)=(a+b+2)x^2+(a+c-5)x+(b+c-1)$

$Q(x)=5x^2+3x+2$

donde $P(x) \equiv Q(x)$, calcule $a+b+c$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 7

5. Si el polinomio es homogéneo

$$P(x, y)=x^5y^m+x^ny^8+m^2x^my^{m+n-4}$$

halle el valor de m^2+n^2.

A) 35 B) 45 C) 85
D) 95 E) 105

Helicotarea

Nivel I

1. Si el monomio es de octavo grado

$$M(x, y)=3^{12}x^{2a-3}y^{a-1}$$

determine el grado relativo con respecto a x.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

2. Halle el valor de x e y en y el monomio

$$M=\frac{\sqrt[3]{a^{x+y}b^{y+6}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{1-y}}$$

si $GR(a)=2$
$GA(M)=7$

A) 5 y 3 B) 8 y 2 C) 1 y 5
D) 5 y 6 E) 5 y 7

3. Dado el polinomio

$$P(x)=ax^{a+1}y^{b+3}-2x^{a+2}y^b+bx^{a+4}y^{b-1}$$

donde su GA = 15, calcule la suma de sus coeficientes.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 13 E) 15

4. El papá de Pedro le dice a su hijo "Si resuelves el problema te doy propina igual al resultado del polinomio homogéneo siguiente":

$$P(x, y)=25x^3y^m+x^ny^4+mx^my^{m+n-6}$$

Halle el valor de m^2+n^2. ¿Cuál fue la propina de Pedro?

A) 38 B) 40 C) 41
D) 51 E) 71

Nivel II

5. Si el polinomio

$$P(x)=3x^{3a-b}-5x^{2a}-7x^{3a+c}+x^{a+b+c}+\ldots$$

es completo y ordenado decrecientemente, efectúe

$$T=(a^2+b^2+c^2)^{b+c}$$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 14

6. Calcule ab si el polinomio

$$P(x, y, z)=4x^{(a+b)^{a-b}}+5y^{(a-b)^{a+b}}+2z^{(a+b)^{2b}}$$

es homogéneo.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

7. Luis, alumno del 5.º B del colegio Saco Oliveros ingreso a su aula y en el Ecran encuentra al problema: "Si se tiene que el polinomio es completo y ordenado

$$P(x)=ax^{a-3}+abx^{b-1}-abcx^{c-2}+m^2$$

calcule $a+b+c$". Lo resuelve y el resultado es

A) 8. B) 9. C) 10.
D) 12. E) 15.

8. Si los polinomios son idénticos

$$P(x, y)=mx^2+4my^2+3nx^2+4x^2-3y^2$$
$$Q(x, y)=13x^2+9y^2$$

halle el valor de m^2+n^2.

A) 9 B) 10 C) 13
D) 15 E) 18

Nivel III

9. Sabiendo que el siguiente polinomio es homogéneo:

$$P(x, y)=x^{3m+1}y^n+a^2x^my^{7n+1}$$

halle el valor de $\frac{m}{n}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

10. En el monomio

$$M(x, y, z)=\frac{x^ny^mz^{5n}}{x^{1-m}y^{n-3}z^{m-2}}$$

se sabe que $GR(x)=12$
$GR(y)=10$

Determine $GR(z)$.

A) 3 B) 2 C) 7
D) −3 E) −2

PRODUCTOS NOTABLES

CAPÍTULO 3

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Identifica los diversos productos notables y sus propiedades.
- Aplica los productos notables en la resolución de problemas.

Helicocuriosidades

La última noche de Cardano

...así que mi vida, precisamente, termina hoy, día 21 de septiembre, del año de 1576. No todos podrán precisar con exactitud matemática el día de mi muerte y hasta la hora y el minuto como yo, que para eso soy un gran astrólogo más amigo de las estrellas que de los hombres, que ellas iluminan la noche, y no traicionan. Así pues, adiós; me despido de una vida plena como pocos mortales la han disfrutado, que yo sí, pues lo puedo asegurar y por lo tanto, lo aseguro.

21 de septiembre de 1576

Ciudad de Roma.

Gerolamo Cardano

El anciano dejó la pluma sobre la mesa, bajó la tapa del tintero, metió las cinco hojas de papel que había llenado con una letra pulcra y ordenada en una carpeta de cuero repujado y se levantó al comprobar que la luz de la tarde había comenzado a decaer. Después de una última ojeada a las nubes que aparecían teñidas de rojo por los últimos rayos del sol, al bosque cercano que tantas veces había recorrido en busca de hierbas para sus pócimas y ungüentos y al descuidado jardín que en su día estuvo cuidado pero tampoco tanto, cerró las cortinas considerando que ya se había despedido suficientemente del paisaje.

—¡Imponente!— le dijo a su imagen reflejada en el espejo. Y repitió imponente al imaginarse que así los verían al día siguiente el notario y el alguacil del distrito y el cardenal, con la intención de que lo descubrieran yaciendo elegantemente ataviado sobre el adornado lecho y se encargaran de divulgar las noticia de que aquel hombre sabio, o sea él, Gerolamo Cardano, había muerto en el día y hora predichos. Que por esta premonición y cálculo astrológico —pensó, aún ante el espejo— mis admiradores me admirarán aún más, y me tendrán en adelante por aún mejor mago de lo que ya me consideran en la vida al haber adivinado la fecha exacta de mi muerte mediante la astrología y la adivinanza y los cálculos matemáticos, ciencias estas en las que soy maestro. Aunque es de suponer que mis detractores, que también los tengo, y muchos, para denigrarme una vez más harán correr la voz que, por no dar mi brazo a torcer y no fracasar en mi augurio, ayudé a la muerte en su intento en el día y hora asegurado ingiriendo cañaheja, que como saben todos los que lo saben, es tan venenosa como la cicuta, en fin.

Y si predije que moriría tres días antes de cumplir los 75 años pues moriré, que además de ser un gran mago, adivino, científico y matemático soy un hombre de palabra.

Helicoteoría

PRODUCTOS NOTABLES

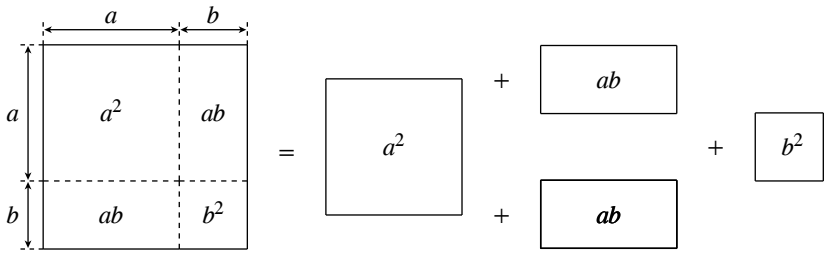
APORTES SUSTANCIALES DEL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Sabemos que la parte teórica de la matemática tiene su origen en las escuelas científicas y filosóficas de la Grecia antigua. Una vez descubiertos los números irracionales, en la aún fortalecida matemática griega, hubo la necesidad de crear para la investigación científica una teoría matemática general adecuada, tanto para los números racionales como para los irracionales.

En cuanto se descubrieron los números irracionales resultó que la colección de magnitudes geométricas por ejemplo, los segmentos era más completa que el conjunto de los números racionales, entonces resultó oportuno construir un cálculo más general en forma geométrica. Este cálculo fue creado y recibió el nombre de álgebra geométrica pues desde este momento los productos notables —conocidos en la actualidad— tienen su interpretación geométrica.

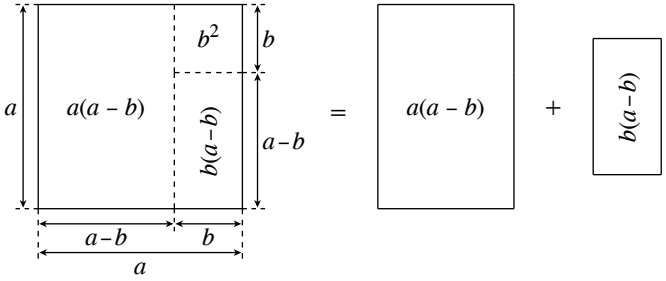
Algunos de estos ejemplos se muestran a continuación

1. Trinomio cuadrado perfecto



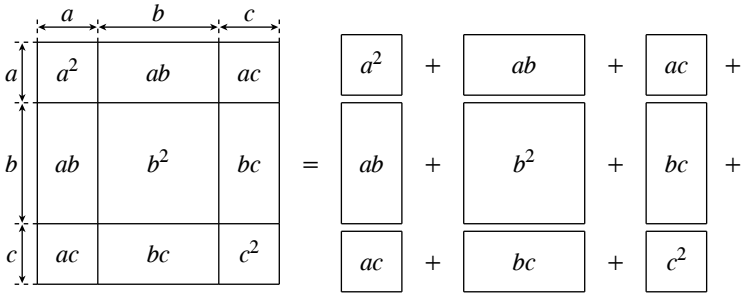
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Diferencia de cuadrados



$$a(a - b) + b(a - b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

3. Desarrollo de un trinomio al cuadrado



$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

PRODUCTOS NOTABLES

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa, sin necesidad de efectuar la operación de multiplicación. Ello por la forma característica que presentan.

Principales equivalencias algebraicas

1. **Trinomio cuadrado perfecto** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

   Identidad de Legendre $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

   $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

   Teorema

   Todo trinomio de la forma $(ax^2 + bx + c)$ es cuadrado perfecto, si y solo si, su discriminante es igual a cero.

   Es decir: $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \leftrightarrow \boxed{b^2 = 4ac}$

2. **Diferencia de cuadrados** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

3. **Desarrollo de un binomio al cubo** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

   $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

   Identidad de Cauchy $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

   $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

4. **Suma y diferencia de cubos** $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

   $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

   Formas particulares usuales: $(a + 1)(a^2 - a + 1) = a^3 + 1$

   $(a - 1)(a^2 + a + 1) = a^3 - 1$

5. **Desarrollo de un trinomio al cuadrado** $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

   $(ab + bc + ca)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2abc(a + b + c)$

6. **Desarrollo de un trinomio al cubo**

   Forma expuesta por Cauchy: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3bc(b + c) + 3ca(c + a) + 6abc$

   Otras formas usuales del desarrollo: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$

   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$

   $(a + b + c)^3 = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$

7. **Identidades de Stevin** $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

   $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

8. **Identidad trinómica de Argand** $(a^{2n} + a^nb^n + b^{2n})(a^{2n} - a^nb^n + b^{2n}) = a^{4n} + a^{2n}b^{2n} + b^{4n}$

   Forma general de mayor utilidad: $(a^{2n} + a^n + 1)(a^{2n} - a^n + 1) = a^{4n} + a^{2n} + 1$

9. **Identidad de Gauss** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

   Para lo cual debemos tener en cuenta que: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

10. **Igualdades condicionadas** Si $a + b + c = 0$, se cumplen las siguientes relaciones:

    - $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$
    - $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
    - $a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ca)^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.
    - $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + bc + ca)$
    - $a^6 + b^6 + c^6 = 3(abc)^2 - 2(ab + bc + ca)^3$

Helicosíntesis

PRODUCTOS NOTABLES

Identidades de Lagrange

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)$
$=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+$
$(bz-cy)^2+(az-cx)^2$

Identidades de Gauss

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

Identidades condicionales

Si $a+b+c=0$, entonces se cumple

- $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc-ca)$
- $a^3+b^3+c^3=3abc$

Trinomio cuadrado perfecto

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

- Identidades de Legendre
  $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
  $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

Diferencia de cuadrados

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Cubo de un binomio

- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

- Identidades de Cauchy
  $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$
  $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

Suma y diferencia de cubos

- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

Cuadrado de un trinomio

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Cubo de un trinomio

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$

Identidades de Stevin

- $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
- $(x+a)(x+b)(x+c)=$
  $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

Identidad de Argand

$(a^{2m}+a^mb^n+b^{2n})(a^{2m}-a^mb^n+b^{2n})=a^{4m}+a^{2m}b^{2n}+b^{4n}$

Problemas resueltos

1. Simplifique

$$\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}$$

Resolución

Haciendo $a-b=x$

$b-c=y \quad +$

$c-a=z$

Sumando: $0=x+y+z$

Por propiedad

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

Reemplazando en el ejercicio

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}=\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=\frac{3xyz}{xyz}=3$$

Rpta.: 3

2. Si $a^2+a^{-2}=2$, donde $a>0$, halle el valor de a^3+a^{-3}.

Resolución

Del dato

$$a^2+a^{-2}=2$$

Sumando "2" miembro a miembro

$$a^2+2+a^{-2}=2+2$$

$$\underbrace{a^2+2a^1a^{-1}+a^{-2}}_{\text{TCP}}=4$$

$$(a^1+a^{-1})^2=4$$

$$\rightarrow a+a^{-1}=2\ldots(\alpha)$$

Elevando (α) al cubo y por Cauchy

$$(a+a^{-1})^3=(2)^3$$

$$a^3+a^{-3}+3aa^{-1}(a+a^{-1})=8$$

$$a^3+a^{-3}+3(1)(2)=8$$

$$\therefore\ a^3+a^{-3}=2$$

Rpta.: 2

3. Si $x+x^{-1}=3\sqrt{2}$, halle el valor de x^4+x^{-4}.

Resolución

Del dato

$$(x+x^{-1})^2=(3\sqrt{2})^2$$

$$x^2+2xx^{-1}+x^{-2}=18$$

$$x^2+2+x^{-2}=18$$

$$x^2+x^{-2}=16\ldots(\alpha)$$

Elevando (α) al cuadrado

$$(x^2+x^{-2})^2=(16)^2$$

$$x^4+2\underbrace{x^2x^{-2}}_{1}+x^{-4}=256$$

$$x^4+2+x^{-4}=256$$

$$\therefore\ x^4+x^{-4}=254$$

Rpta.: 254

4. Si $a=b+1$, simplifique

$$P=\sqrt[8]{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8}$$

Resolución

En P se tiene

$$P=\sqrt[8]{1(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)+b^8}$$

Pero de la condición: $a-b=1$

Luego

$$P=\sqrt[8]{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(a+b)(a+b)}_{a^2-b^2}(a^2+b^2)}_{a^4-b^4}(a^4+b^4)}_{a^8-b^8}+b^8}$$

$$P=\sqrt[8]{a^8-\cancel{b^8}+\cancel{b^8}}$$

$$P=\sqrt[8]{a^8}\rightarrow P=a$$

Rpta.: a

Helicopráctica

1. Sabiendo que $a + b = 2$

$ab = 3$

halle el valor de $E = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$.

2. Reduzca

$$(a+b+c)(a+b+c)+c^2-(a-b)^2$$

3. Si $a+b+c=0$, reduzca

$$K = \frac{a^3+b^3+c^3}{24abc}$$

4. Halle el valor numérico de

$$N = (a+1)^2+(b+1)^2+2ab-1$$

para $a = 5-\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$b = 5+\sqrt{3}-\sqrt{5}$

5. Simplifique

$$\frac{x^3-8}{x^2+2x+4}+\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}$$

6. Siendo $x^2 + 2x - 9 = 0$, reduzca

$$T = (x+5)(x+4)(x^2-9)(x-2)(x-1)$$

7. Halle el valor de

$$P = \sqrt[32]{80(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1}$$

8. Si se sabe que $a + b + c = 12$

$ab + ac + bc = 60$

halle el valor de

$$R=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$$

Helicotaller

Nivel I

1. Si se tiene que $a + b = \sqrt{5}$

$ab = 3$

halle el valor de $T = a^6 + b^6$.

Resolución

2. Los participantes en la olimpiadas del colegio Saco Oliveros es la expresión simplificada de

$$E = (m+3)^3-(m-3)^3+(m+2)(m-2)-19m^2$$

¿cuántos participan en las olimpiadas?

Resolución

Nivel II

3. Reduzca

$$(a+b+c)(a-c+b)-(a+c-b)(a-b-c)$$

Resolución

4. Simplifique

$$W = \frac{x^3+1}{x^2-x+1} - \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$$

Resolución

5. Simplifique

$$T = (x-3)(x-5)(x+2)(x+4) - (x^2-x-13)^2 + 50$$

Resolución

Nivel III

6. Sabiendo que $a+b+c=0$ y $abc \neq 0$, halle el valor de

$$K = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

Resolución

7. Si la diferencia de las cuartas potencias de dos números positivos es 369 y el cuadrado de la suma de los cuadrados es 1681, ¿cuál es el valor de la diferencia del doble del mayor con el triple del menor número?

Resolución

8. Sabiendo que

$$a+b+c = 2$$
$$a^2+b^2+c^2 = 12$$

evalúe $T = (a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$.

Resolución

Helicodesafío

1. Si $(x+y+2z)^2+(x+y-2z)^2=8(x+y)z$, halle el valor de

$$R = \left(\frac{x-z}{z-y}\right)^8 + \left(\frac{y-z}{z-x}\right)^8 + \left(\frac{x+y}{2z}\right)^8$$

A) 0 B) 1 C) 3
D) 256 E) 1056

2. Si $x^2+1=3x$, reduzca

$$Q = \sqrt{\frac{20\left(x+x^8\right)\left(x^3+x^2\right)}{13x^7}}$$

A) 1 B) 4 C) 5
D) 10 E) 25

Helicorreto

1. Si se tiene $a+a^{-1}=2\sqrt{3}$, calcule a^4+a^{-4}.

A) 98 B) 90 C) 86
D) 80 E) 78

2. Reduzca

$$(x+5)(x-5)(x^4+25x^2+625)+5^6$$

A) 2 B) x^5 C) x^6
D) $2x^5$ E) $3x^6$

3. Si se tiene que

$$a+b+c=7 \text{ y } a^2+b^2+c^2=25$$

calcule $(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$.

A) 74 B) 84 C) 94
D) 104 E) 135

4. Efectúe

$$(m+n+p)(m-p+n)-(m+p-n)(m-n-p)$$

A) 1 B) $3mn$ C) 3
D) $4mn$ E) 4

5. Reduzca

$$P = \sqrt[8]{48(7^2+1)(7^4+1)(7^8+1)+1}$$

A) 9 B) 19 C) 33
D) 49 E) 59

Helicotarea

Nivel I

1. Si $a-b=1$ y $ab=\frac{3}{4}$, efectúe

$$P = a+a^2+a^3+b^3+b^2+b$$

A) 2 B) 5 C) 8
D) 3 E) 9

2. Reduzca $(x^m+5)(x^m-1)-(x^m-2)(x^m+6)$.

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 12

3. Si $a+b+c=0$, efectúe

$$P = \frac{18abc}{a^3+b^3+c^3}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

4. Dé el valor de

$$(1+x)(1-x)(1-x+x^2)(1+x+x^2)(1+x^6+x^{12})$$

si $x=\sqrt[6]{2}$

A) -5 B) -7 C) -6
D) -4 E) -8

Nivel II

5. Wilmer le pregunta al jefe de Dirage de Saco Oliveros ¿cuántos alumnos de 5.º año hay en el local de Rosales?, José le responde: reduce $(x+4)(x^2-4x+16)-(x-4)(x^2+4x+16)$ y tendrás el resultado:

A) 33 B) 52 C) 76
D) 84 E) 128

6. Si $x+x^{-1}=3$, calcule x^6+x^{-6}.

A) 92 B) 122 C) 322
D) 342 E) 421

7. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x^2+y^2+z^2+14=2(x+2y+3z)$ evalúe $T=\frac{xyz}{x^3+y^3+z^3}$.

A) 6 B) 3 C) -6
D) $\frac{1}{6}$ E) -3

8. Halle el valor de K y obtendrá la edad del profesor Chumbi hace 40 años:

$$K = \sqrt[8]{(15)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1}$$

¿cuál es la edad del profesor de Saco Oliveros?

A) 14 B) 16 C) 18
D) 20 E) 26

Nivel III

9. Si $\sqrt[4]{x+4yz}+\sqrt[4]{x-4yz}=2y$

$\sqrt[4]{x+4yz}-\sqrt[4]{x-4yz}=2z$

reduzca $\sqrt{x+4yz}+\sqrt{x-4yz}$

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 2
D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

10. Sabiendo que

$$ab = \sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{10}+1$$
$$a+b-1 = \sqrt[3]{10}$$

efectúe $M=3ab(a+b)$.

A) 22 B) 33 C) 44
D) 55 E) 66